

РАЗДЕЛ 2 МОДЕЛИ, СИСТЕМЫ, СЕТИ В ТЕХНИКЕ

SECTION 2 MODELS, SYSTEMS, NETWORKS IN THE TECHNIQUE

УДК 004.925
doi:10.21685/2227-8486-2021-1-7

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И КАЧЕСТВА ВИЗУАЛИЗАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Ю. Н. Косников

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
kosnikov@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Статья является продолжением публикации, посвященной особенностям применения радиальных базисных функций (РБФ) в геометрическом моделировании трехмерных объектов визуализации (Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2020. № 4). Актуальность тематики определяется все более широким применением РБФ, в том числе в целях интерполяционной реконструкции неаналитических поверхностей различной природы. РБФ приносят положительный эффект не только в решение чисто геометрических задач визуализации, но и в повышение ее качества. Рассмотрены приемы повышения производительности интерполяции без потери качества визуализации. *Материалы и методы.* Рассмотрены способы сегментной интерполяции поверхностей с гладкой стыковкой сегментов. В их основе лежит выделение сегментов, имеющих одинаковое количество опорных точек или лежащих в одинаковом координатном диапазоне. Для гладкой стыковки сегментов применен метод переноса опорных точек. Показана возможность РБФ-интерполяции для вычисления направлений нормальных векторов, проведенных через опорные точки поверхности. Обосновано применение метода конечных разностей для вычисления значений смешивающих функций, в частности предложенных функций ортогонального базиса (СФОВ), в режиме реального времени. *Результаты.* Оценка производительности и точности сегментной интерполяции с гладкой стыковкой сегментов методом переноса опорных точек показывает эффективность этого приема. РБФ-интерполяция нормальных векторов позволяет получить корректные нормали к поверхности объекта, необходимые для моделирования его освещенности. Метод конечных разностей дает возможность вычислять значение РБФ и СФОВ за три-четыре операции суммирования. *Выводы.* Сегментная интерполяция дает качество реконструируемой поверхности, достаточное для инженерного применения с целью визуализации. Для гладкой стыковки сегментов рекомендуется метод переноса опорных точек. Вычисление направлений нормалей возможно теми же методами и алгоритмами, что и вычисление значений смешивающих функций.

© Косников Ю. Н., 2021. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Метод конечных разностей позволяет значительно ускорить интерполяционные процессы визуализации, обеспечивая построение поверхностей трехмерных объектов в режиме реального времени.

Ключевые слова: радиальная базисная функция, смешивающая функция ортогонального базиса, сегментная интерполяция, метод переноса опорных точек, моделирование освещенности, метод конечных разностей

Для цитирования: Косников Ю. Н. Особенности применения радиальных базисных функций для повышения производительности и качества визуализации трехмерных объектов // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2021. № 1. С. 78–91. doi:10.21685/2227-8486-2021-1-7

APPLICATION FEATURES RADIAL BASIS FUNCTIONS FOR IMPROVING THE PERFORMANCE AND QUALITY OF THREE-DIMENSIONAL OBJECTS VISUALIZATION

Yu.N. Kosnikov

Penza State University, Penza, Russia
kosnikov@gmail.com

Abstract. *Background.* The article is a continuation of the publication devoted to the radial basis functions use in geometric modeling of three-dimensional visualization objects. The topic relevance is determined by the increasingly widespread RBF used, including for the purpose of interpolation reconstruction of various natures non-analytical surfaces. RBFs bring a positive effect in solving not only purely geometric visualization problems, but also in improving its quality. This article discusses techniques for improving the interpolation performance without losing the visualization quality. *Materials and methods.* Methods of segmental surfaces interpolation with smooth segments joining are considered. They are based on the selection of segments with the same reference points number or lying in the same coordinate range. For smooth segments joining, the method of transferring reference points is applied. The possibility of RBF-interpolation for calculating the directions of normal vectors drawn through the surface reference points is shown. The application of the finite difference method for calculating the values of blending functions, in particular, the proposed orthogonal basis functions, in real time is justified. *Results.* Evaluation of the performance and accuracy of segmental interpolation with smooth segments joining by the reference points transfer method the effectiveness of this technique shows. RBF-interpolation of normal vectors allows you to get the correct normals to the object surface, which are necessary for modeling its illumination. The finite difference method makes it possible to calculate the value of RBF and orthogonal basis functions in 3–4 summation operations. *Conclusions.* Segmental interpolation provides the quality of the reconstructed surface that is sufficient for engineering applications for visualization purposes. For smooth segments joining, the method of transferring reference points is recommended. The calculation of the normals directions is possible by the same methods and algorithms as the calculation of the blending functions values. The finite difference method allows you to significantly speed up the interpolation processes of visualization, providing the construction of the three-dimensional objects surfaces in real time.

Keywords: radial basis function, blending function of orthogonal basis, segmental interpolation, reference points transfer method, illumination modeling, finite difference method

For citation: Kosnikov Yu.N. Application features radial basis functions for improving the performance and quality of three-dimensional objects visualization. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* = *Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2021;1:78–91. (In Russ.). doi:10.21685/2227-8486-2021-1-7

Введение

Объекты визуализации часто задаются набором характерных (опорных) точек, которые неравномерно расставлены в пространстве. Для реконструкции поверхности объектов в этом случае успешно применяют интерполяционные методы на основе радиальных базисных функций (РБФ) и смешивающих функций ортогонального базиса (СФОВ) [1]. Во многих практических случаях имеется необходимость обеспечить динамику объектов в режиме реального времени (РВ). В качестве примеров можно назвать мониторинг транспортных средств, отображение технологических процессов, обучение на авиационных или судовых тренажерах. Динамика РВ требуется в том числе в сценах, которые, по сути, являются статическими. Например, для прокладки трассы трубопровода с привязкой к местности рационально построить пространственную сцену, включающую элементы рельефа, натурогенные и антропогенные объекты и модель самого трубопровода. Для полного понимания особенностей вариантов прокладки трубопровода необходимо рассматривать сцену в разных ракурсах, в разном масштабе. Для этого требуется выполнять над сценой геометрические преобразования сдвига и поворота, обеспечивая ей шесть степеней свободы. Эволюции сцены в процессе ее визуального анализа выполняются в РВ.

Для моделирования сложных трехмерных сцен в режиме РВ применяют специальные приемы повышения производительности вычислительных процессов. Например, при моделировании протяженных объектов для упрощения интерполяции поверхности разбиваются на сегменты, которые моделируются по отдельности, а затем гладко сопрягаются. Однако в этом случае могут возникнуть аномалии формы объектов. Тогда приходится решать ряд задач, не направленных напрямую на задание конфигурации объектов, но тем не менее существенно влияющих на восприятие их формы. Ресурсоемкой задачей является затенение объектов, т.е. моделирование их освещенности от внешних источников света. Без этого трехмерный объект не выглядит объемным. Для затенения нужны корректные векторы нормалей, проведенные через вершины полигональной модели объекта. Направление этих векторов для каждой вершины поверхности объекта может вычисляться заранее, храниться в виде координат векторов в памяти графической системы и в режиме РВ пересчитываться в соответствии с динамикой объекта. Другой вариант – вычисление координат нормалей в режиме РВ. В статье рассмотрены методы и приемы повышения производительности процесса интерполяции без потери ее качества.

Выделение и стыковка сегментов объекта

Для повышения производительности алгоритма интерполяции следует представить реконструируемую поверхность в кусочно-аналитической форме и строить ее полигональную модель последовательно по сегментам. В этом случае нужно решить две задачи: разбить исходное множество опорных точек на подмножества, на базе которых строятся сегменты, и обеспечить гладкую стыковку сегментов на этапе РВ. Точностные и временные характеристики интерполяции зависят от выбранных способов решения обеих задач.

Можно назвать два способа разделения опорных точек на подмножества. Самым простым является разделение по признаку одинаковых координатных диапазонов. Диапазоны декартовых или сферических координат-аргументов делятся на одинаковые интервалы, на которых далее выполняется локальная интерполяция. В случае неравномерной расстановки исходных

опорных точек за основу интервала должен быть взят участок с их наиболее высокой плотностью. Размер участка определяется заданной точностью интерполяции. Тогда участки с меньшей плотностью опорных точек, интерполяция на которых потенциально может быть проведена на большей площади, получатся неоправданно маленькими. В предельном случае в некоторые интервалы координат может не попасть ни одной точки. Тогда придется увеличивать координатные интервалы, что приведет к ухудшению временных характеристик интерполяции участков с высокой плотностью опорных точек – из-за увеличения количества попавших в них опорных точек.

Второй способ разделения опорных точек на подмножества основан на выделении одинакового количества точек для каждого участка поверхности. На практике эти количества могут быть не обязательно в точности одинаковыми, допустимо приближенное равенство. Способ обеспечивает идентичные точностные и временные характеристики интерполяции сегментов поверхности. Однако алгоритмы выделения подмножеств опорных точек и построения на них полигональной модели поверхности будут усложненными по следующей причине.

Для выполнения интерполяции в режиме РВ следует выделять четырехугольные участки, границы которых параллельны координатным линиям поверхности аргументов. В этом случае полигонизация каждого участка выполняется в процессе его построчного сканирования, причем диапазон координат для каждой строки сканирования постоянен. Сборка полигонов идет непосредственно в процессе сканирования: промежуточные точки строки сканирования принимаются за вершины полигонов и соединяются с вершинами предыдущей строки. Если участки имеют более сложную форму, закон их обхода в процессе полигонизации будет сложным. Тогда сборка полигонов потребует применения дополнительной памяти для хранения промежуточных результатов полигонизации или может привести к аномалиям формы поверхности («щелям»). В то же время, если неравномерность расстановки опорных точек велика, выделение четырехугольных участков с примерно одинаковым числом опорных точек может оказаться проблематичным.

Гладкая стыковка сегментов поверхности в процессе ее полигонизации (в режиме РВ) может быть достигнута с помощью различных приемов [2]. Самым простым приемом является полигональная экстраполяция. Граничные вершины смежных сегментов объединяются в полигоны, которые закрывают щели между сегментами. Внешний вид линии стыковки улучшается с помощью текстурирования. Более затратным в вычислительном отношении является метод переноса опорных точек. При проведении интерполяции текущего сегмента в его состав вводится некоторое количество опорных точек соседних сегментов. Вычисления промежуточных точек текущего сегмента выполняются с их участием, но на визуализацию подается участок поверхности в рамках только этого сегмента. Гладкость стыковки сегментов зависит от количества перенесенных опорных точек. Это же количество влияет на временные характеристики интерполяции.

Метод скользящего окна («плавающая» локальная интерполяция) объединяет в себе своеобразный способ выделения подмножества опорных точек и своеобразную реализацию метода переноса. На поверхности аргументов организуется четырехугольное окно, в центральной зоне которого проводятся интерполяция и полигонизация. Затем окно перемещается на один шаг вдоль одной координаты-аргумента, причем величина шага равна размеру центральной зоны окна. Далее процесс повторяется. В представленном методе последовательные положения центральной зоны окна можно рассматривать

как участки с одинаковыми интервалами координат, предназначенные для выделения сегментов поверхности, а само окно – как совокупность опорных точек сегмента и перенесенных опорных точек, добавленных для гладкой стыковки сегментов. Размеры окна выбираются с учетом желаемых точностных характеристик интерполяции: чем больше размеры окна, тем ниже погрешность интерполяции, но тем хуже ее временные характеристики.

Анализ показывает, что оба способа разделения поверхности на сегменты имеют недостатки. Можно рекомендовать применять более простой первый способ, выбирая число опорных точек сегмента с тем расчетом, чтобы сегменты с малой плотностью опорных точек формировались с заданной точностью. При этом сегменты с более высокой плотностью гарантированно получают высокую точность интерполяции. Анализируя приемы гладкой стыковки сегментов, можно рекомендовать использовать метод переноса опорных точек, позволяющий работать с сегментами большого размера и понятным образом управлять гладкостью стыковки. Результаты экспериментального исследования приемов сегментной интерполяции поверхности приведены в статьях [3, 4]. На рисунке 1 показаны результаты интерполяции одной из поверхностей Франке, которые часто берутся специалистами в качестве тестовой поверхности [5–7]. Математическое описание поверхности, выбранной в качестве тестовой, имеет вид

$$f(x, y) = 0,75e^{\left(-\frac{(9x-2)^2}{4} - \frac{(9y-2)^2}{4}\right)} + 0,75e^{\left(-\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{9y+1}{10}\right)} + \\ + 0,5e^{\left(-\frac{(9x-7)^2}{4} - \frac{(9y-3)^2}{4}\right)} - 0,2e^{-(9x-4)^2 - (9y-7)^2}.$$

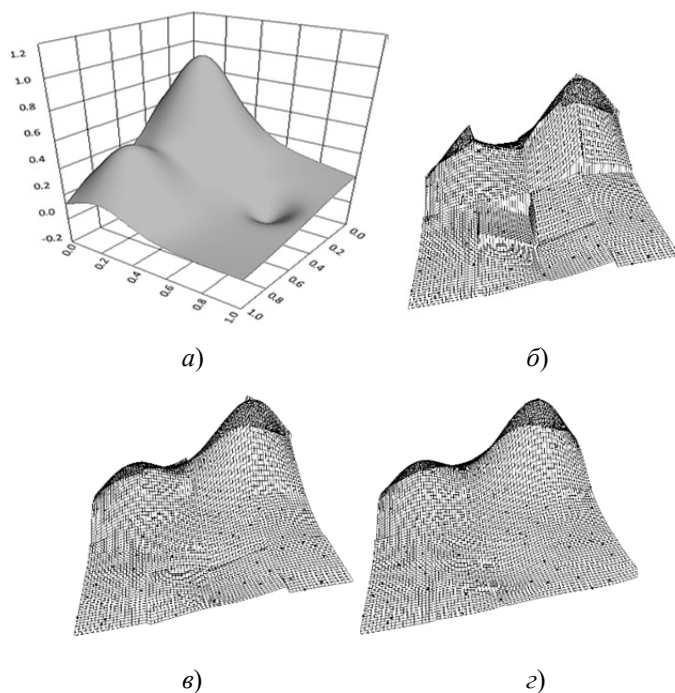


Рис. 1. Интерполяция поверхности с разбиением на сегменты:
а – тестовая поверхность; *б* – интерполированная поверхность без переноса опорных точек; *в* – интерполированная поверхность с зоной переноса, равной 0,1 стороны сегмента; *г* – равной 0,5 стороны сегмента

Для эксперимента функция Франке задана 100 опорными точками, расположенными на поверхности случайным образом, с разбиением на 16 сегментов одинаковых геометрических размеров. Применен метод стыковки сегментов с переносом опорных точек. На рис. 1,а показана сплошная поверхность, построенная по аналитической формуле Франке, на остальных рисунках – интерполированная поверхность в каркасной форме. На рис. 1,б для сравнения приведена стыковка сегментов без применения переноса опорных точек, которая дает щелевые аномалии. На рис. 1,б «перекрой» сегментов составил 0,1 стороны сегмента, на рис. 1,в – 0,5 стороны сегмента. Визуальный анализ подтверждает эффективность описанных приемов и возможность управления качеством интерполяции с их помощью. Результат эксперимента показывает, что применение предложенных приемов и рациональный выбор их параметров позволяют повысить производительность графической системы компьютера более чем на порядок, качество изображения при этом практически не снижается. Количественные характеристики «плавающей» интерполяции при варьировании размеров окна нуждаются в экспериментальном подтверждении.

Моделирование освещенности объектов

Пространственный объект выглядит объемным, если на его поверхность наложены тени от источников освещения. Для затенения объектов в компьютерной графике используются методы, основанные на анализе нормалей к участкам объекта, т.е. моделирование освещенности объекта, как и реконструкция его формы, является геометрической задачей. Ресурсоемкость ее решения напрямую зависит от сложности описания поверхности. Если требуется визуализировать объект в режиме РВ, то есть два способа решения задачи затенения. В соответствии с первым нормали вычисляются заранее и сохраняются в памяти вычислительной системы, а в режиме РВ их направления пересчитываются с учетом эволюций объекта и используются для затенения. В этом случае графическая система должна хранить в памяти координаты сотен тысяч, а то и миллионов вершин, а для хранения нормалей требуется дополнительная память, объем которой тем больше, чем сложнее сцена. Второй способ затенения предполагает вычисление координат корректных нормалей в процессе визуализации сцены. Способ возможен, если сама полигональная поверхность генерируется в процессе визуализации. Реализация обоих способов затенения осложняется нерегулярной расстановкой опорных точек объекта, поэтому и здесь следует предварительно перейти от исходного облака опорных точек к их новому набору, как это описано в статье [1]. Можно показать, что для затенения поверхности также может быть использована интерполяция на основе РБФ и СФОб, а для поддержания режима РВ нужно отдать предпочтение СФОб простого вида и явной форме записи интерполянта.

Обобщенное описание поверхности с применением РБФ или СФОб в декартовом пространстве можно представить в параметрической или явной форме. Для случая с использованием РБФ параметрическая запись включает три уравнения вида

$$c = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi(r_i),$$

а для случая с применением СФОб – три уравнения следующего вида:

$$c = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi(r_u, r_v), \quad (1)$$

где $c = x, y, z$; i – номер опорной точки; N – количество опорных точек на участке интерполяции; $\Phi(r_i)$ – выбранная РБФ, значение которой зависит от расстояния r_i между текущей и i -й опорной точками, найденного в параметрической системе координат u, v ; $\Phi(r_{ui}, r_{vi})$ – выбранная СФОБ, значение которой зависит от расстояний r_{ui}, r_{vi} между текущей и i -й опорной точками, измеренных вдоль координатных линий u, v .

Параметрическое уравнение вектора нормали $\bar{N}(n_x, n_y, n_z)$, где n_x, n_y, n_z – координаты вектора, как известно, в форме определителей имеет вид [8]

$$n_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad n_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad n_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Явную форму описания поверхности можно представить как параметрическую, например, для декартова пространства

$$\left. \begin{aligned} x &= u, \\ y &= v, \\ z &= z(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тогда с учетом очевидных соотношений

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u} = 0$$

из (2) получается следующее описание нормали к поверхности, представленной в явной форме:

$$n_x = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad n_y = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad n_z = 1. \quad (4)$$

Знаки координат $\bar{N}$ зависят от выбранного направления вектора и могут быть изменены на противоположные. Учитывая связь параметрического и явного представления нормали, анализ процесса ее вычисления можно провести по общему описанию (2).

Вид многих РБФ содержит высокие степени, радикалы, логарифмы, экспоненциальные функции аргументов [9–11], которые при дифференцировании дают сложные выражения. При вычислении координат нормали по выражениям (2) частные производные перемножаются, а результаты перемножения суммируются, что еще более усложняет функциональные зависимости. Их вычисление в режиме РВ представляет трудности даже при явной форме описания (4). Например, одной из популярных РБФ является функция «инверсный мультиквадрик»:

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}}.$$

Координата нормали n_x при использовании для интерполяции поверхности этой РБФ, в которой r – декартово расстояние между текущей и опорной точками, имеет вид

$$n_x = - \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i \epsilon^2 (x - x_i)}{\sqrt{\left(1 + \epsilon^2 \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)\right)^3}}. \quad (5)$$

Слагаемые выражения (5) имеют довольно сложную структуру, и вычислять их сумму в режиме РВ проблематично.

Вычисление координат вектора нормали значительно упрощается при использовании СФОБ. В работе [1] приведено общее описание СФОБ:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r_u, r_v) &= b f_u b f_v, \\ b f_u &= \begin{cases} (1 - r_u^r)^m & \text{при } r_u < 1, \\ 0 & \text{при } r_u \geq 1, \end{cases} \\ b f_v &= \begin{cases} (1 - r_v^s)^n & \text{при } r_v < 1, \\ 0 & \text{при } r_v \geq 1, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где m, n, r, s – показатели степени, определяющие форму СФОБ, а также показаны некоторые разновидности этих смешивающих функций.

Нахождение промежуточных точек при СФОБ-интерполяции идет в процессе движения алгоритма интерполяции вдоль координатных линий поверхности аргументов. В этом случае на каждом шаге алгоритма в СФОБ каждой опорной точки изменяется только один сомножитель (см. выражение (6)), а значение второго остается постоянным. В качестве примера приведем выражение для нахождения координаты нормали n_x при явной форме описания поверхности, в которой использована наиболее сложная биквадратная СФОБ.

Описание биквадратной СФОБ с учетом соотношений (3) имеет вид

$$\Phi(r_x, r_y) = (r_x^2 - 1)^2 (r_y^2 - 1)^2,$$

а выражение для вычисления координаты нормали, полученное дифференцированием (1) при условии (3):

$$n_x = - \sum_{i=1}^N 4 \lambda_i (r_{xi}^3 - r_{xi}) (r_{yi}^2 - 1),$$

где $r_{xi} = |x - x_i|$, $r_{yi} = |y - y_i|$.

Если на каждом шаге алгоритма приращение получает координата x , а координата y не меняется, то, введя обозначение $\lambda_{nxi} = -4 \lambda_i (r_{yi}^2 - 1)$, можно представить приведенное выражение в виде

$$n_x = \sum_{i=1}^N \lambda_{nxi} (r_{xi}^3 - r_{xi}) = \sum_{i=1}^N \lambda_{nxi} \Phi(r_{xi}, r_{yi}), \quad (7)$$

который по структуре совпадает с интерполяционным выражением (1). Выражение (7) включает СФОБ i -й опорной точки $\Phi(r_{xi}, r_{yi})$ в виде кубического полинома и коэффициент влияния λ_{nxi} i -й опорной точки на направление нормали в текущей точке поверхности. Коэффициент λ_{nxi} зависит от расстояния r_{yi} , которое при движении алгоритма вдоль координаты x остается постоянным и пересчитывается при переходе алгоритма на следующую координатную линию x (при изменении y). Ясно, что структура (7) гораздо проще, чем у выражения (5). Как будет показано далее, его значение на очередном шаге алгоритма может быть вычислено «быстрым» методом конечных разностей. Применение в СФОБ полиномов более низкой степени, например параболической выпуклой смешивающей функции

$$\Phi(r_u, r_v) = (1 - r_u)^2 (1 - r_v)^2$$

или аналога гауссиана

$$\Phi(r_u, r_v) = (1 - r_u^2)(1 - r_v^2), \quad (8)$$

позволяет еще более упростить вычисление координат нормалей.

В случае параметрического описания поверхности координаты нормалей вычисляются по гораздо более сложным выражениям (2). Применять их в режиме РВ не имеет смысла. В этом случае корректные направления нормалей к поверхности объекта находятся для новых, равномерно расставленных опорных точек предварительно, не в режиме РВ. А координаты нормалей в промежуточных точках, необходимые для затенения поверхности, находятся в режиме РВ с помощью простой линейной интерполяции, как это делается в модели освещения Фонга [12].

Конечно-разностное вычисление смешивающих функций

Повышение производительности рендеринга пространственных сцен может достигаться средствами геометрического моделирования, например уменьшением числа полигонов в объекте по мере его удаления от наблюдателя (LOD-технология) [13]. Другим способом повышения производительности является рациональная организация вычислительного процесса визуализации. Один из вариантов – применение вычислительных методов. Например, вычислительная сложность интерполяции на основе смешивающих функций может быть уменьшена путем применения метода конечных разностей [14]. В математике этот метод эффективно применяется для вычисления полиномов степени n с помощью n операций суммирования. Вычисление степенной функции параметра t $f(t)$ идет по приращениям: очередное значение функции получается путем прибавления к предыдущему значению конечной разности первого порядка. В свою очередь, значение конечной разности, если оно не является константой, вычисляется по приращениям путем прибавления к предыдущему значению конечной разности более высокого порядка и т.д. [8]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{t(j+1)}^0 &= \Delta_{tj}^0 + \Delta_{tj}^1, \quad \Delta_{t0}^0 = f(t)|_{t=0}, \\ \Delta_{t(j+1)}^1 &= \Delta_{tj}^1 + \Delta_{tj}^2, \quad \Delta_{t0}^1 = \Delta_t^1|_{t=0}, \\ &\dots \\ \Delta_{t(j+1)}^{n-1} &= \Delta_{tj}^{n-1} + \Delta_{tj}^n, \quad \Delta_{t0}^{n-1} = \Delta_t^{n-1}|_{t=0}, \\ \Delta_t^n &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где Δ_t^s – конечная разность порядка s ($s = 0, 1, 2, \dots$) по параметру t , причем $\Delta_t^0 = f(t)$; Δ_{t0}^s – начальное значение конечной разности (при $t = 0$), необходимое для начала вычислительного процесса; j – номер шага вычислений.

Аппарат конечных разностей с успехом может быть применен для вычисления значений РБФ и СФОБ, так как они определяются последовательно в процессе обхода поверхности аргументов интерполянта по координатным линиям u, v с шагами δ_u, δ_v соответственно. При переборе значений u от 0 до максимального значения U значение v не меняется. При достижении переменной u значения U выполняется приращение координаты v и осуществляется переход на следующую координатную линию v . Далее процесс повторяется до достижения параметрами u, v максимальных значений. В процессе перебора значений координат u, v вычисляются значения смешивающих функций. Так, для вычисления значения СФОБ «аналог гауссиана» (8) необходимо выполнить следующие действия.

А. При движении по координатной линии u СФОБ i -й опорной точки с учетом обозначений (6) выглядит следующим образом:

$$\Phi(u, v) = bf_v \left\{ 1 - \left(\frac{|u - u_i|}{U} \right)^2 \right\}.$$

Значение $\Phi(u, v)$ с применением конечных разностей вычисляется за две операции суммирования:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \Phi_{j+1}(u, v) &= \Phi_j(u, v) + (\Delta_u^1 \Phi(u, v))_j, \quad \Phi_0(u, v) = bf_v \left\{ 1 - \left(\frac{u_i}{U} \right)^2 \right\}, \\ 2) \quad (\Delta_u^1 \Phi(u, v))_{j+1} &= (\Delta_u^1 \Phi(u, v))_j + (\Delta_u^2 \Phi(u, v))_j, \\ (\Delta_u^1 \Phi(u, v))_0 &= bf_v \left\{ -\frac{2|u_i| \delta_u + \delta_u^2}{U^2} \right\}, \\ (\Delta_u^2 \Phi(u, v))_j &= (\Delta_u^2 \Phi(u, v))_0 = bf_v \left\{ -\frac{2\delta_u^2}{U^2} \right\} = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Б. Начальные значения конечных разностей по координате u зависят от координаты v (от функции bf_v) и тоже могут быть вычислены за две операции суммирования методом конечных разностей:

$$\left. \begin{aligned} bf_v &= \left\{ 1 - \left(\frac{|v - v_i|}{V} \right)^2 \right\}, \\ 1) \quad bf_{v(j+1)} &= bf_{vj} + (\Delta_v^1 bf_v)_j, \quad bf_{v0} = 1 - \left(\frac{v_i}{V} \right)^2, \\ 2) \quad (\Delta_v^1 bf_v)_{j+1} &= (\Delta_v^1 bf_v)_j + (\Delta_v^2 bf_v)_j, \quad (\Delta_v^1 bf_v)_0 = -\frac{2|v_i|\delta_v + \delta_v^2}{V^2}, \\ (\Delta_v^2 bf_v)_j &= -\frac{2\delta_v^2}{V^2} = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В СФОВ (8) обозначения r_u, r_v – это расстояния между текущей и опорной точками, измеренные вдоль координатных линий u, v , в выражениях (10), (11) они представлены следующим образом:

$$r_u = |u - u_i|, r_v = |v - v_i|.$$

В. При переходе на очередную координатную линию v по выражениям (11) находится функция bf_v для начальных значений конечных разностей по координате u . Далее на каждом шаге вдоль координаты u они используются для вычисления СФОВ по выражениям (10).

Г. Получившиеся промежуточные точки принимаются за узлы полигональной сетки. По аналогичному алгоритму находятся СФОВ нормалей к поверхности. Вместе с нормальными полигональная модель передается в аппаратный графический процессор компьютера для дальнейшей обработки и визуализации.

Заключение

Сегментная интерполяция дает качество реконструируемой поверхности, достаточное для инженерного применения с целью визуализации. Для гладкой стыковки сегментов рекомендуется метод переноса опорных точек. Он может быть использован в различных алгоритмах. Интересным вариантом сегментной интерполяции является «плавающая» локальная интерполяция методом скользящего окна. Для эффективного применения метода необходимо определить количественные характеристики окна: его общий размер, размер центральной части, в пределах которой выполняется интерполяция, количество переносимых опорных точек.

Математическое описание нормалей к поверхности содержит смешивающие функции той же структуры, что и описание самой поверхности. В связи с этим нахождение направлений нормалей возможно теми же методами и алгоритмами, что и вычисление значений смешивающих функций – РБФ и СФОВ – для интерполяции поверхности. Два этих процесса могут идти параллельно.

Метод конечных разностей позволяет значительно ускорить интерполяционные процессы визуализации. Для его применения следует выбирать степенные СФОВ. При этом операции возведения в степень и перемножения выполняются для нахождения начальных значений СФОВ, а их промежуточные значения вычисляются с помощью операций суммирования, что и обес-

печивает построение поверхностей трехмерных объектов в режиме реального времени.

К задачам, на решение которых нужно обратить внимание в будущем, относится следующее. Рассмотренные в работе [1] разновидности СФОБ имеют одинаковый характер влияния на текущую точку в обоих направлениях координат-аргументов, т.е. являются в этом смысле симметричными. Изобразительные возможности интерполяции поверхностей на основе СФОБ можно расширить, если применить «несимметричные» СФОБ, влияющие на текущую точку по различным законам (см. выражение (6)).

Поверхность, построенная на основе РБФ- или СФОБ-интерполяции по традиционным алгоритмам, является гладкой. В то же время на практике возникает необходимость построения поверхностей с аномалиями гладкости, например, земной поверхности повышенной детальности. При этом участки поверхности с аномалиями гладкости произвольно чередуются с гладкими участками. Встает задача управления гладкостью поверхности. Вариант управления гладкостью сплайновой кривой описан, например, в работе [15]. Возможности решения этой задачи для РБФ-интерполяции поверхностей нуждаются в исследовании.

Исходные опорные точки поверхности, как правило, расставлены в пространстве неравномерно. Применение описанного в статье [1] подхода с неравномерной расстановкой опорных точек в узлах равномерной координатной сетки может привести к весьма значительным расстояниям между соседними опорными точками. Если вычисление промежуточных точек при этом идет по одному и тому же закону, то многие получившиеся полигоны могут иметь большие размеры, что даст нереалистичные («граненые») участки поверхности. Одним из путей улучшения качества интерполяции в этом случае является изменение закона расстановки промежуточных точек между опорными точками. Есть информация о применении с этой целью так называемой центростремительной параметризации (centripetal parameterization). Ее использование для интерполяции плоских кривых Кэтмулла–Рома описано, например, в работах [16, 17]. Ее возможности для интерполяции поверхностей нуждаются в выяснении.

Рассмотренные методы интерполяции используют все опорные точки. Производительность вычислений при моделировании поверхности можно повысить, если уменьшить количество опорных точек, участвующих в моделировании, т.е. перейти от интерполяции к аппроксимации. Редукция числа опорных точек должна проводиться из условия минимизации погрешности аппроксимации. Алгоритмы редукции и аппроксимации нуждаются в разработке.

Список литературы

1. Косников Ю. Н. Особенности применения радиальных базисных функций в геометрическом моделировании трехмерных объектов визуализации // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2020. № 4. С. 55–70.
2. Косников Ю. Н. Геометрическое моделирование в графических системах реального времени : монография. Пенза : Инф.-изд. центр Пенз. гос. ун-та, 2006. 218 с.
3. Хоанг Т. Х., Косников Ю. Н. Кусочно-аналитическое моделирование протяженных поверхностей с использованием радиальных базисных функций // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук : материалы III науч.-практ. Всерос. конф. (школы-семинара) молодых ученых. Тольятти : Изд. Качалин Александр Васильевич, 2017. С. 616–620.

4. Косников Ю. Н., Хоанг Т. Х. Экспериментальное исследование изобразительных и точностных свойств смешивающих функций в задачах визуализации пространственных объектов // Новые информационные технологии и системы : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. С. 28–32.
5. Franke R. Scattered Data Interpolation: Test of some method // Mathematics of Communication. 1982. Vol. 38. P. 181–200.
6. Mongillo M. Choosing basis functions and shape parameters for radial basis function methods // SIAM Undergraduate Research Online. 2011. Vol. 4. P. 190–209.
7. Sturgill D. Variable Shape Parameter Strategies in Radial Basis Function Methods. Theses, Dissertations and Capstones. Marshall University, Department of Mathematics, 2009. 104 p.
8. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М. : Наука, 1986. 544 с.
9. Larsson E., Fornberg B. A Numerical Study of some Radial Basis Function based Solution Methods for Elliptic PDEs // Computers and Mathematics with Applications. 2003. № 46. P. 891–902.
10. Skala V. RBF Interpolation with CSRBF of Large Data Sets // International Conference on Computational Science, ICCS 2017. Procedia Computer Science. 2017. Vol. 108. P. 2433–2437. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187705091730621X>
11. Buhmann M. A new class of radial basis functions with compact support // Mathematics of Computation. 2001. Vol. 70, № 233. P. 307–318. doi:10.1090/s0025-5718-00-01251-5.
12. Gortler S. J. Foundations of 3D Computer Graphics. Cambridge : MIT Press, 2012. 273 p.
13. Trelldal N., Vestergaard F., Karlshøj J. Pragmatic Use of LOD – a Modular Approach // 11th European Conference on Product and Process Modelling, 7 Sep. 2016 – 9 Sep 2016. Cyprus, Limassol, 2016. P. 1–9. URL: <https://orbit.dtu.dk/en/publications/pragmatic-use-of-lod-a-modular-approach>
14. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики / пер. с англ. под ред. Ю. М. Баяковского [и др.]. М. : Мир, 2001. 604 с.
15. Kosnikov Y. N., Zimin A. P., Novikov A. V. Information Technique for Smooth and Non-Smooth Curves Modeling // 2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). Vladivostok, 2020. P. 1–4. doi:10.1109/FarEastCon50210.2020.9271619.
16. Yuksel C., Schaefer S., Keyser J. Parameterization and applications of Catmull-Rom curves // Computer-Aided Design. 2011. № 43 (7). P. 747–755.
17. Jen Hong Tan, Acharya U. R. Active spline model: A shape based model-interactive segmentation // Digital Signal Processing. 2014. № 35. P. 64–74.

References

1. Kosnikov Yu.N. Features of the application of radial basis functions in the geometric modeling of three-dimensional visualization objects. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, and networks in economics, technology, nature, and society*. 2020;4:55–70. (In Russ.)
2. Kosnikov Yu.N. *Geometricheskoe modelirovanie v graficheskikh sistemakh real'nogo vremeni: monografiya = Geometric modeling in real-time graphics systems: monograph*. Penza: Inf.-izd. tsentr Penz. gos. un-ta, 2006:218. (In Russ.)
3. Khoang T.Kh., Kosnikov Yu.N. Piecewise analytical modeling of extended surfaces using radial basis functions. *Prikladnaya matematika i informatika: sovremennye issledovaniya v oblasti estestvennykh i tekhnicheskikh nauk: materialy III nauch.-prakt. Vseros. konf. (shkoly-seminara) molodykh uchenykh = Applied Mathematics and Computer Science: modern research in the field of natural and technical sciences:*

materials of the III scientific-practical course. All-Russian Conf. (school-seminar) of young scientists. Tol'yatti: Izd. Kachalin Aleksandr Vasil'evich, 2017:616–620. (In Russ.)

4. Kosnikov Yu.N., Khoang T.Kh. Experimental study of the visual and precision properties of mixing functions in spatial object visualization problems. *Novye informatsionnye tekhnologii i sistemy: materialy XV Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. = New Information Technologies and Systems: proceedings of the XV International Scientific-tech. conf.* Penza: Izd-vo PGU, 2018:28–32. (In Russ.)
5. Franke R. Scattered Data Interpolation: Test of some method. *Mathematics of Communication.* 1982;38:181–200.
6. Mongillo M. Choosing basis functions and shape parameters for radial basis function methods. *SIAM Undergraduate Research Online.* 2011;4:190–209.
7. Sturgill D. *Variable Shape Parameter Strategies in Radial Basis Function Methods. Theses, Dissertations and Capstones.* Marshall University, Department of Mathematics, 2009:104.
8. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov = Handbook of Mathematics for engineers and students of higher education institutions.* Moscow: Nauka, 1986:544. (In Russ.)
9. Larsson E., Fornberg B. A Numerical Study of some Radial Basis Function based Solution Methods for Elliptic PDEs. *Computers and Mathematics with Applications.* 2003;46:891–902.
10. Skala V. RBF Interpolation with CSRBF of Large Data Sets. *International Conference on Computational Science, ICCS 2017. Procedia Computer Science.* 2017;108:2433–2437. Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187705091730621X>
11. Buhmann M. A new class of radial basis functions with compact support. *Mathematics of Computation.* 2001;70(233):307–318. doi:10.1090/s0025-5718-00-01251-5.
12. Gortler S.J. *Foundations of 3D Computer Graphics.* Cambridge: MIT Press, 2012:273.
13. Treldal N., Vestergaard F., Karlshøj J. Pragmatic Use of LOD – a Modular Approach. *11th European Conference on Product and Process Modelling, 7 Sep. 2016 – 9 Sep 2016.* Cyprus, Limassol, 2016:1–9. Available at: <https://orbit.dtu.dk/en/publications/pragmatic-use-of-lod-a-modular-approach>
14. Rodzhers D., Adams Dzh. *Matematicheskie osnovy mashinnoy grafiki: per. s angl. = Mathematical foundations of machine graphics / translated from English.* Moscow: Mir, 2001:604. (In Russ.)
15. Kosnikov Y.N., Zimin A.P., Novikov A.V. Information Technique for Smooth and Non-Smooth Curves Modeling. *2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon).* Vladivostok, 2020:1–4. doi: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271619.
16. Yuksel C., Schaefer S., Keyser J. Parameterization and applications of Catmull-Rom curves. *Computer-Aided Design.* 2011;43(7):747–755.
17. Jen Hong Tan, Acharya U.R. Active spline model: A shape based model-interactive segmentation. *Digital Signal Processing.* 2014;35:64–74.

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Николаевич Косников

доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры информационно-
вычислительных систем,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: kosnikov@gmail.com

Yuri N. Kosnikov

Doctor of technical sciences, professor,
professor of sub-department of information
and computing systems,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)